

STRUCTURA SPECTRALĂ A ECUAȚIEI KLEIN-GORDON ÎN CÎMPURILE SCHWARZSCHILD, REISSNER-NORDSTROM, KERR ȘI KERR-NEWMAN

Alex Gaița

Institutul de Gravitatie și Științe Spațiale, bd. Ana Ipătescu 21, 71111
București, România

(Primit la redacție la 20 februarie 1992)

THE SPECTRAL STRUCTURE OF THE KLEIN-GORDON EQUATION IN THE SCHWARZSCHILD, REISSNER-NORDSTROM, KERR AND KERR-NEWMAN FIELDS. The structure of an energetic spectrum for scalar particles due to relativistic gravitational effects, electromagnetic interactions and the rotation of central body in the Schwarzschild, Reissner-Nordstrom, Kerr and Kerr-Newman space-times of general relativity is studied. The numerical estimations of these effects for small primordial evaporating black-holes are done.

Contents : 1. The structure of the energy spectrum of quasi-bound levels for a quantum scalar particle in the Schwarzschild field. 2. A scalar particle under the simultaneous action of gravitational and Coulomb fields. 3. The structure of the energetic spectrum of a Klein-Gordon particle in the Kerr gravitational field. 4. The structure of the energetic spectrum of a scalar particle in the Kerr-Newman fields with small electric charge.

1. STRUCTURA SPECTRULUI CVASIDISCRET DE ENERGII A UNEI PARTICULE CUANTICE SCALARE ÎN CÎMP SCHWARZSCHILD

1.1. SEPARAREA VARIABILELOR ECUAȚIEI KLEIN-GORDON ÎN SPAȚIUL SCHWARZSCHILD

Să examinăm mișcarea unei particule scalare de masă μ în spațiu Schwarzschild, care se prezintă în coordonatele cu același nume sub aspectul (vezi, spre exemplu [1]):

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) (cdt)^2 - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} \cdot dr^2 - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta \cdot d\varphi^2) \quad (1)$$

Ecuatia Klein-Gordon pentru particula în formă general covariantă se prezintă în felul următor :

$$\left(\frac{1}{(-g)^{1/2}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left((-g)^{1/2} g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu}\right) + \frac{\mu^2 c^2}{\hbar^2}\right) \Phi = 0 \quad (2)$$

Pentru stări staționare de energie E , moment cinetic orbital $L = \hbar \cdot \sqrt{l(l+1)}$, ($l = 0, 1, 2, \dots$) și proiecție a momentului cinetic $L_z = \hbar m$ pe o axă arbitrară $z(\vartheta = 0)$, ce trece prin originea sistemului de coordonate Schwarzschild vom avea :

$$\Phi_{E,L,m} = e^{-iEt/\hbar} \psi_{L,m}(r, \vartheta, \varphi) = e^{-iEt/\hbar} R_{E,l}(r) Y_l^m(\vartheta, \varphi), \quad (3)$$

unde $Y_l^m(\vartheta, \varphi)$ sînt funcțiile obișnuite sferice pentru spațiu plat :

$$Y_l^m(\vartheta, \varphi) = \left[\frac{2l+1}{4\pi} \cdot \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right] P_l^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi} \quad (3.a)$$

Funcția radială $R(r)$ satisface ecuația :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \frac{d}{dr} \left(r^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \frac{dR}{dr} \right) + \\ & + \left[\left(\frac{E}{\hbar c} \right)^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \left(\frac{\mu^2 c^2}{\hbar^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} \right) \right] R = 0, \end{aligned} \quad (3.b)$$

care nu are soluții analitice exacte pe tot domeniul de definiție al coordonatei r . Stările staționare sînt posibile pentru că geometria Schwarzschild este staționară și are simetrie sferică.

În continuare, pentru a simplifica scrierea ecuațiilor, vom introduce frecvența ciclică $\omega = E/\hbar$, ce corespunde energiei E și vom trece la sistemul raționalizat de unități $c = \hbar = G = 1$, în care mărimile fizice și geometrice se măsoară în unități Planckiene :

$$M_{Pl} = \left(\frac{\hbar c}{G} \right)^{1/2} = 2,177 \cdot 10^{-5} g, \quad E_{Pl} = M_{Pl} \cdot c^2 =$$

$$= \left(\frac{\hbar c^5}{G} \right)^{1/2} = 1,959 \cdot 10^{16} \text{ ergi}$$

$$L_{Pl} = \frac{\hbar}{M_{Pl} c} = \left(\frac{\hbar G}{c^3} \right)^{1/2} = 1,616 \cdot 10^{-33} \text{ cm}, \quad t_{Pl} = \frac{L_{Pl}}{c} =$$

$$= \left(\frac{\hbar G}{c^5} \right)^{1/2} = 5,391 \cdot 10^{-43} s,$$

etc.

Vom nota stările staționare ale particulelor, localizate în exteriorul orizontului evenimentelor (razei Schwarzschild) $r > R_g = 2M$ cu aju-

torul integralei :

$$\int_{r > R_g} g^{00} \psi^* \psi (-g)^{1/2} d^3x = \int_{R_g}^{\infty} R^* R \frac{r^2 dr}{1 - R_g/r} \quad (4)$$

Acest mod de normare rezultă din definițiile cvadrivectorului densității de probabilitate și a produsului scalar pentru ecuația Klein-Gordon :

$$\langle \Phi_1 | \Phi_2 \rangle = \frac{i}{2} \int \{ \Phi_1^* (\partial^\mu \Phi_2) - \Phi_2 (\partial^\mu \Phi_1)^* \} (-g)^{1/2} d\Sigma_\mu, \quad (5)$$

$d\Sigma_\mu$ fiind elementul de suprafață de integrare. De aici :

$$\langle \Phi | \Phi \rangle = \int j^0 (-g)^{1/2} d^3x = \frac{i}{2} \int \{ \Phi^* (\partial^0 \Phi) - \Phi (\partial^0 \Phi)^* \} (-g)^{1/2} d^3x$$

iar integrala (4) rezultă, dacă vom lua în considerare reprezentarea (3) a funcției de undă și faptul, că geometria Schwarzschild este diagonală.

Funcțiile proprii de undă, ce corespund stărilor staționare de energii $\omega < \mu$ au spectru continuu și satisfac condițiilor de frontieră :

$$R(r) \sim \frac{1}{r} (A e^{-i\omega r^*} + B e^{i\omega r^*}), \quad r^* \rightarrow -\infty \quad (6)$$

și :

$$R(r) \sim \frac{1}{r} \exp(-(\mu^2 - \omega^2)^{1/2} r^*) \quad (7)$$

Coordonata r^* este definită în modul următor (coordonata „broasca țestoasă” a lui Wheeler [1]) :

$$r^* = r + R_g \ln(r/R_g - 1) \quad (8)$$

Ea coincide practic cu r , când $r \rightarrow \infty$ și tinde la $-\infty$, când $r \rightarrow R_g$. Stările (3) cu un astfel de comportament (6 - 7) se normează cu ajutorul funcției δ a lui Dirac, pentru că domeniul respectiv de definiție al coordonatei r poate să conțină un număr infinit de stări discrete energetice în intervalul $0 < \omega < \mu$. Dacă vom impune condiția $B = 0$, rezultă imediat : $\omega = \omega_0 - i\gamma$, adică spectrul de energii nu poate fi discret. În cazul, când $\gamma \ll \omega_0$, vom vorbi despre un spectru cvasidiscret de energii, pentru care se realizează formula binecunoscută a lui Breit și Wigner din mecanica cuantică (vezi, spre exemplu [2], sau [3]). Funcția de repartiție a energiei în vecinătatea unui nivel cvasidiscret este :

$$f(\omega) = \frac{\gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2} \quad (9)$$

1.2. SOLUȚIILE ECUAȚIEI RADIALE. APROXIMAȚIA NULĂ

Să scriem ecuația radială pentru o nouă funcție : $F = \sqrt{r\rho}R$, unde $\rho = r - R_g$:

$$F'' + \left[\omega^2 - \mu^2 + \frac{(2\omega^2 - \mu^2)R_g}{\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} \right] F = - \left[\frac{\omega^2 R_g^2}{\rho^2} + \frac{l(l+1) R_g}{\rho^2(\rho + R_g)} + \frac{R_g^2}{4\rho^2(\rho + R_g)^2} \right] F \quad (10)$$

În cazul cînd $\rho \gg R_g$ termenii $\sim \rho^{-2}(\rho + R_g)^{-1}$ și $\sim \rho^{-2}(\rho + R_g)^{-2}$ din partea dreaptă a ecuației radiale pot fi omiși în scopul obținerii unei soluții aproximative a ecuației Klein-Gordon, pentru ca mai apoi să fie luați în considerație ca o mică perturbație a acestei soluții. În cazul cînd $\mu R_g \ll l + 1/2$ termenul $\omega^2 R_g^2/\rho^2$ de asemenea poate fi considerat ca o perturbație (cu toate, că același termen determină comportamentul asimptotic al funcției radiale de undă, cînd $\rho \rightarrow 0$).

Dacă am localiza particula într-un anumit moment de timp cu ajutorul funcției de undă de tip coulombian, ce transformă în zero partea stîngă a ecuației (10), perturbația din partea dreaptă a aceleiași ecuații ar cauza o mică amortizare (stingere). Neglijînd această amortizare și trecînd, astfel, la aproximația spectrului discret, vom considera partea dreaptă a ecuației ca o perturbație, ce creează structura fină a nivelelor energetice ale particulei. Această situație este complet analogă unui oscilator armonic, expus unei perturbații de tipul βx^3 , cînd spectrul devine continuu (la modul riguros), însă în cazul unor valori mici ale parametrului β valorile discrete proprii ale energiei și funcțiile de undă corespunzătoare descriu comportamentul particulei în groapa de potențial pentru un timp nu prea îndelungat comparativ cu timpul (perioada) de amortizare a oscilațiilor.

În aproximație nulă, funcția radială de undă pentru particula localizată în groapa evasinewtoniană de potențial o vom reprezenta cu ajutorul polinoamelor Laguerre :

$$F_{n1}(\rho) = C_{n1}(2\Omega_n \rho)^{l+1} \exp(-\Omega_n \rho) Q_{n-l-1}^{2l+1}(2\Omega_n \rho) \quad (11)$$

normate astfel, că :

$$Q_n^k(x) = \frac{1}{k!} {}_1F_1(-n, k+1, x) = \sum_{j=0}^n (-1)^{n+j} x^{n-j} \frac{n!}{j!(n-j)!(n+k-j)!}$$

(vezi [4], [5]). Drept argument în plus pentru aceasta servește descreșterea cît se poate de rapidă a funcției F_{n1} , cît și a densității radiale de probabilitate (care este proporțională cu $F_{n1}^2 \sim \rho^{2+2l}$), cînd $\rho \rightarrow 0$ ($r \rightarrow R_g$). Este evident, că soluția (11) se obține din condiția mărginirii creșterii soluției ecuației (10), cînd $\rho \rightarrow 0$, la fel ca și mărimea $\Omega_n = (\mu^2 - \omega^2)^{1/2}$, care este

inversă razei Bohr a particulei din teoria atomului de hidrogen în spațiu plat :

$$1 + l - \frac{(2\omega^2 - \mu^2)M}{(\omega^2 - \mu^2)^{1/2}} = -n_r = 0, -1, -2, \dots \quad (12)$$

$$\left(\frac{\omega}{\mu}\right)_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{n^2}{8(\mu M)^2} \left[1 - \left[1 - \frac{8(\mu M)^2}{n^2}\right]^{1/2}\right]\right)^{1/2} =$$

$$= 1 - \frac{\mu^2 M^2}{2n^2} + \frac{15\mu^2 M^2}{8n^4} + \dots; \quad \Omega_n = \frac{\mu^2 M}{n} + \dots \quad (13)$$

În această aproximație, aleasă drept nulă, spectrul particulei este degenerat, adică nu depinde de numărul cuantic orbital (l). După cum se cunoaște destul de bine același lucru se întâmplă în cazul cîmpului coulombian în tratare nerelativistă [2–5], iar la nivel clasic aceasta corespunde închiderii orbitelor coulombiene (dar, evident, și a celor newtoniene, în problema lui Kepler, vezi, spre exemplu, [6]). Acest fapt este cauzat de o simetrie suplimentară (accidentală) a ecuațiilor de mișcare nerelativiste (atît cuantice, cît și clasice) a cîmpurilor cu potențial $-\alpha/r$, ce se manifestă în existența unei constante a mișcării (a unui operator comutativ cu Hamiltonianul coulombian), numite vectorul excentricității, sau constanta Runge-Lenz [3, 4]:

$$\mathbf{e} = -\frac{\alpha \mathbf{r}}{r} - \frac{\mathbf{L} \times \mathbf{p}}{\mu}; \quad \mathbf{e} \cdot \mathbf{r} = e r \cos(\mathbf{e}, \mathbf{r}) = L^2 - \mu \alpha r \quad (14)$$

$$\hat{\mathbf{e}} = -\frac{\hat{\alpha} \mathbf{r}}{r} - \frac{\hat{\mathbf{L}} \times \hat{\mathbf{p}} - \hat{\mathbf{p}} \times \hat{\mathbf{L}}}{2\mu}; \quad \left[\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2\mu} - \frac{\alpha}{r}, \hat{\mathbf{e}}\right] = 0 \quad (15)$$

Cu toate că componentele vectorului excentricității nu comută reciproc, ele comută totuși cu componentele respective ale operatorului momentului cinetic orbital $\hat{\mathbf{L}}$, ceea ce generează o algebră $O(4)$ (sau $O(3,1)$ pentru stările de spectru continuu), ce corespunde rotațiilor într-un spațiu euclidian patrudimensional [7].

Revenind la formulele (12–13) pentru energia particulei scalare în cîmp Schwarzschild în aproximație nulă vom menționa că, această aproximație conține, spre deosebire de cazul nerelativist newtonian, o corecție relativistă care ține de redefinirea energiei cinetice în relativitatea generală, dar care nu depinde de numărul cuantic orbital. În paragraful următor această corecție va fi inclusă în aproximația întâia relativistă, lucru care nu schimbă esențial natura efectelor relativiste gravifice.

Coeficienții de normare C_n pentru funcția radială (11) îi vom obține din condiția următoare :

$$\int_{R_0}^{\infty} r^2 (1 - R_0/r)^{-1} R^2(r) dr = \int F_{nl}^2(\rho) d\rho = 1, \quad (16)$$

de unde :

$$C_{nl}^2 = \frac{\Omega_n(n+l)!}{n(n-l-1)!} \quad (17)$$

1.3. METODA PERTURBAȚIILOR. CALCULUL ELEMENTELOR MATRICEALE. STRUCTURA FINĂ A SPECTRULUI DE ENERGII

Vom calcula elementele matriceale ale interacțiilor, ce corespund termenilor din partea dreaptă a ecuației radiale (10), aplicînd metoda standard a perturbațiilor din mecanica cuantică în spațiu plat în cazul forțelor centrale [2—5] și funcțiile radiale (11) cu coeficienții de normare (17), calculați în compartimentul precedent al acestui capitol. Astfel, în prima aproximație a metodei perturbative, vom obține :

$$\Delta\Omega_{nl}^2 = \langle nlm | W_l^{(1)} | nlm \rangle + \langle nlm | W_l^{(2)} | nlm \rangle + \langle nlm | W_l^{(3)} | nlm \rangle,$$

unde :

$$\langle nlm | W_l^{(1)} | nlm \rangle \equiv \langle W_l^{(1)} \rangle = \omega^2 R_g^2 \langle \rho^{-2} \rangle \approx \frac{4\mu^6 M^4}{n^3(l+1/2)} ;$$

$$\langle nlm | W_l^{(2)} | nlm \rangle \equiv \langle W_l^{(2)} \rangle = \left\langle \frac{l(l+1)R_g}{\rho^2(\rho + R_g)} \right\rangle \approx \frac{2\mu^6 M^4(1 - \delta_{l0})}{n^3(l+1/2)}$$

Este ușor de văzut, că în cazul stărilor cu $l > 0$ termenul $W_l^{(3)} = R_g^2/4\rho^2 (\rho + R_g)^2$ introduce o contribuție de un ordin de mărime inferior. Starea de baza s , ce corespunde momentului orbital $l = 0$ necesită un studiu aparte, însă calculul direct al amortizării pentru acest nivel [8,9] arată că, în condițiile $\mu M \ll 1/4$, se realizează nivelul cvasidiscret $s(l = 0)$ cu stingerea :

$$\gamma_{n,0} = 8 \frac{(\mu M)^5}{n^3}, \quad (18)$$

care este mult mai mică decît distanța energetică între subnivelele s ale particulei, aceasta fiind localizată la $r \gg R_g$. Prin urmare se poate vorbi despre existența nivelelor cvasidiscrete s în câmpul unor Black-hole-uri mici cu masa $M < M_{\text{Pl}}^2/4\mu \cong 10^{-10}/\mu$ (g), masa particulei μ fiind exprimată tot în grame.

Întorcîndu-ne la structura fină a subnivelelor s în câmp Schwarzschild vom menționa, că în acest caz termenul $W_l^{(3)}$ nu are o contribuție neglijabilă. Calcularea elementelor matriceale $\langle W_l^{(3)} \rangle$ cu funcțiile radiale $F_{n0}(\rho)$ în limitele $R_g \leq r < \infty$ arată, că contribuția principală în integrala matriceală este adusă în acest caz de domeniul : $|r - R_g| < \sim R_g$. Aceasta ne oferă motivația pentru a nu ține totuși cont de corecția respectivă în limitele aplicabilității teoriei perturbațiilor pentru aceste nivele : $\mu M \ll 1/4$, cînd stingerea (18) este neglijabil de mică.

Astfel, prima corecție relativistă la energia de legătură a unei particule cu spin 0, ce depinde de mărimea momentului cinetic orbital al particulei, este (pentru l arbitrar):

$$\Delta\omega_{nl} = -\frac{\Delta\Omega_{nl}^2}{2\mu} = -\mu \frac{(\mu M)^4(3 - \delta_{l0})}{n^3(l + 1/2)} \quad (19)$$

Vom menționa, că chiar și în cazul $l=0$ această corecție este mai mare ca valoare absolută (aproximativ de $1/\mu M > 1$ ori) decât stingerea nivelului respectiv, cauzată de absorbția particulelor în black-hole. Prezentăm aici formula definitivă pentru energia de legătură a unei particule scalare legate într-un câmp gravific Schwarzschild, restabilind dimensiunea mărimilor fizice, pînă la termenii, ce conțin G^4 :

$$\left(\frac{E}{\mu c^2}\right)_{nl} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{G\mu M}{\hbar cn}\right)^2 - \left(\frac{G\mu M}{\hbar cn}\right)^4 \cdot \left[\frac{(3 - \delta_{l0})n}{l + 1/2} - 15/8\right] \quad (19.a)$$

Dacă vom face o comparație a acestei formule cu formula ce prezintă energia de legătură a unei particule scalare în câmp coulombian, în spațiu plat (vezi, de exemplu, [5]), vom conchide că corecția de ordinul G^4 în (19) este mai mare decât corecția de ordinul α^4 în formula pentru câmp coulombian:

$$\left(\frac{E}{\mu c^2}\right)_{nl} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{Z\alpha}{n}\right)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{Z\alpha}{n}\right)^4 \cdot \left(\frac{n}{l + 1/2} - \frac{3}{4}\right), \quad (20)$$

deci, efectele relativiste în câmp gravific sînt mai mari decât în câmp electric central. Vom vedea, că același lucru se întîmplă și cu valoarea absolută a deplasării periheliului orbitei particulei în câmp gravific, care rezultă foarte ușor din ecuația (19).

1.4. LIMITA CVASICLASICĂ

Vom arăta în cele ce urmează, că în cazul mișcării cvasiclasice cu moment orbital mare $l \gg 1$, corecția de ordinul G^4 , ce se conține în ecuația amintită, corespunde (în sensul principiului corespondenței) efectului clasic de deplasare sistematică a periheliului orbitei particulei de probă în câmp Schwarzschild. În acest scop vom introduce invarianții adiabatici ai lui Bohr-Sommerfeld:

$$I_r = \oint p_r dr = 2\pi(n_r + 1/2); \quad I_\vartheta = \oint p_\vartheta d\vartheta = 2\pi(l - m + 1/2);$$

$$I_\varphi = \oint p_\varphi d\varphi = 2\pi m; \quad (21)$$

și vom calcula variația părții spațiale ΔS_r a acțiunii clasice pentru particula în câmp gravific: $S = -\omega t + L\varphi + S_r + S_\vartheta$, considerînd planul mișcării $\vartheta = \pi/2$:

$$\Delta S_r + 2\pi L = \frac{2\pi \cdot \mu M}{\sqrt{2}(1 - \omega/\mu)^{1/2}} - \frac{15}{4} \pi \cdot \mu M \sqrt{2}(1 - \omega/\mu)^{1/2} + \frac{6\pi (\mu M)^2}{L} \quad (21.a)$$

Efectuînd acest calcul am luat în considerare faptul că momentul cinetic clasic al particulei este egal cu $L = I_\vartheta + I_\varphi$, iar în planul $\vartheta = \pi/2$ invariantul $I_\vartheta = 0$. Deplasarea periheliului orbitei la o singură tură a particulei va fi egală cu:

$$\Delta\varphi = -\frac{\partial}{\partial L}(\Delta S_r) = 2\pi + \frac{6\pi\mu^2 M^2}{L^2}, \quad (22)$$

ceea ce coincide cu valoarea einsteiniană (vezi, spre exemplu [1] sau [11, 12]). Efectuînd același calcul pentru câmpul coulombian vom obține, bineînțeles:

$$\Delta\varphi = 2\pi + \frac{\pi Z^2 \alpha^2}{L^2}, \quad (23)$$

deci deplasarea periheliului în acest caz este de 6 ori mai mică decît în cazul câmpului Schwarzschild, dacă vom înlocui mărimile efectiv echivalente $\mu M \rightarrow |eQ| = Z\alpha$.

Relațiile (19) și (19.a) au fost obținute în lucrarea [12].

2. PARTICULA SCALARĂ SUB ACȚIUNEA CONCOMITENTĂ A CÂMPULUI GRAVIFIC ȘI COULOMBIAN

2.1. ECUAȚIA KLEIN-GORDON ÎN CÂMP REISSNER-NORDSTROM

Să examinăm în continuare structura spectrului ecuației Klein-Gordon pentru o particulă scalară cu sarcina electrică e aflată în câmp Schwarzschild, cînd corpul central este încărcat electric cu sarcina: $-Q = -Ze$. Semnul sarcinii l-am ales astfel, ca produsul $eQ \equiv Ze^2$ să fie pozitiv în cazul interacțiunii cu caracter atractiv. În cazul cînd $Q \ll \sqrt{GM} \cong 1,71 \cdot 10^{20} (M/M_\odot) C$ geometria spațiu-timpului în afara orizontului de evenimente $r > R_g$ nu este afectată de sarcina electrică Q a corpului central și doar în caz contrar se realizează geometria Reissner-Nordström. În sistemul de unități $c = G = 1$, pe care îl vom folosi în continuare ea se prezintă sub forma:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) (cdt)^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \quad (24)$$

cu orizontul de evenimente plasat la $r = r_+ = M + (M^2 - Q^2)^{1/2}$. Condiția egalității forței coulombiene cu cea newtoniană $eQ = \mu M$ implică pentru electroni: $Q \simeq 8,38 \cdot 10^{-2} (M/M_\odot) C$, și prin urmare $Q \ll M$.

Potențialul vector al câmpului electromagnetic asociat geometriei Reissner-Nordström (sau Schwarzschild, în cazul cînd $Q \ll M$) are o singură componentă nenulă, la fel ca și vectorul intensității câmpului electric:

$$A_t = -\frac{Q}{r}, \quad E_r = -\frac{Q}{r^2}; \quad (25)$$

Ecuația Klein-Gordon are următorul aspect, considerînd și $\hbar = 1$:

$$\left[(-g)^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left((-g)^{1/2} g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} + ieA_\nu \right) \right) + \right. \\ \left. + ieA^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - e^2 A_\mu A^\mu + \mu^2 \right] \Phi = 0 \quad (26)$$

Acestei ecuații i se adaugă pentru completitudine și una complex conjugată în raport cu (26). Separînd partea temporală, vom prezenta ecuația (26) sub forma:

$$\left[-g^{tt}(i\partial_t + eA_t)^2 + g^{tm}ieA_t\partial_m + \mu^2 + \right. \\ \left. + (-g)^{1/2} \frac{\partial}{\partial x^k} \left((-g)^{1/2} g^{km} \frac{\partial}{\partial x^m} \right) \right] \Phi = 0, \quad (26.a)$$

unde $k, m = 1, 2, 3$ (r, ϑ, φ).

Cvadrivectorul densității de curent este dat de formula:

$$J^\mu = \frac{1}{2} ie \{ \Phi^* (D^\mu \Phi) - (D^\mu \Phi)^* \Phi \}, \quad (27)$$

unde D_μ înseamnă:

$$D_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} + ieA_\mu \quad (28)$$

Funcția de undă pentru stările staționare de energie ω , moment cinetic orbital l și proiecție a momentului cinetic pe axa $\vartheta = 0$ are aspectul (3), ecuația radială, însă, fiind alta:

$$\left(\frac{Y}{r} \right)^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 Y^2 \frac{dR}{dr} \right) + \left\{ \left(\omega + \frac{eQ}{r} \right)^2 - Y^2 \left(\mu^2 + \frac{l(l+1)}{r^2} \right) \right\} R = 0 \quad (29)$$

cu: $Y^2(r) = 1 - 2M/r + Q^2/r^2$.

2.2. SOLUȚIILE ECUAȚIEI RADIALE

Ne vom limita în continuare la cazul $Q \ll M$, cînd sarcina electrică a corpului central nu perturbă geometria spațiu-timpului în exteriorul razei Schwarzschild, cauzînd însă o interacție suplimentară (coulombiană) între particula de probă și corpul central. În acest caz funcția $Y^2(r)$ se reduce la $Y^2(r) = 1 - 2M/r$. Considerînd, că $\mu M \sim |eQ| \equiv Z\alpha \ll l + 1/2$, vom formula ecuația radială pentru o nouă funcție $F(\rho)$, definită ca și în paragraful precedent :

$$F'' + \left\{ \omega^2 - \mu^2 + 2 \cdot \frac{(2\omega^2 - \mu^2)M + \omega eQ}{\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} \right\} F =$$

$$= - \left[\frac{(2\omega M + eQ)^2}{\rho^2} + \frac{2l(l+1)M}{\rho^3} \right] F, \quad (30)$$

neglijînd, însă de la început termenii, ce scad la infinitatea spațială mai rapid decît $1/\rho^3$.

Vom introduce în continuare energia nerelativistă :

$$\varepsilon = \omega - \mu \quad (31)$$

și vom avea în considerare faptul, că în cazul stărilor cvasistaționare $\varepsilon < 0$. Ecuația (31) în termeni relativști pînă la gradul $\sim v^2/c^2$ are următorul aspect :

$$\frac{1}{2\mu} \cdot \frac{F''}{F} + \left[\varepsilon + \frac{\mu M + eQ}{\rho} - \frac{l(l+1)}{2\mu\rho^2} \right] +$$

$$+ \frac{1}{2\mu} \left[\varepsilon^2 + \frac{2\varepsilon(4\mu M + eQ)}{\rho} + \frac{(2\mu M + eQ)^2}{\rho^2} + \frac{2l(l+1)M}{\rho^3} \right] = 0 \quad (32)$$

Este clar, că aproximației nule (nerelativiste) îi corespund funcțiile radiale (11) cu :

$$\Omega_n = \frac{\mu(\mu M + eQ)}{n} \quad (33)$$

și nivelurile de energii :

$$\left(\frac{\varepsilon}{\mu} \right) = - \frac{(2\mu M + eQ)^2}{2n^2}, \quad (33a)$$

În cazul respingerii electrice ($eQ < 0$) stările cvasilegate sînt posibile doar pentru sarcini electrice $Q > -\mu M/e$. În caz opus particula resimte la

distanțe mari de corpul central ($r \gg R_g$) repulsie, astfel încît stările cvasilegate (sau orbitele clasice mărginite) sînt imposibile.

2.3. CORECȚIILE RELATIVISTE

Să evaluăm contribuția termenilor relativști din ecuația (32) la energia nivelelor respective :

$$-\left\langle \frac{\varepsilon^2}{2\mu} \right\rangle \equiv \langle V^{(1)} \rangle = -\frac{\mu(\mu M + eQ)^4}{8n^4}; \quad (34)$$

$$-\left\langle \frac{\varepsilon(4\mu M + eQ)}{\mu\rho} \right\rangle \equiv \langle V^{(2)} \rangle = -\frac{\mu(\mu M + eQ)^3(4\mu M + eQ)}{2n^4} \quad (35)$$

Contribuțiile obținute provin de la redefinirea relativistă a energiei în cîmp gravific și coulombian, care în paragraful precedent a fost inclusă în aproximația nulă, aceasta neelimind degenerarea nivelelor energetice după numărul cuantic de orbită l .

Să examinăm în continuare termenii, ce corespund efectului de deplasare a periheliului orbitei particulei :

$$\langle V^{(3)} \rangle = -\left\langle \frac{(2\mu M + eQ)^2}{2\mu\rho^2} \right\rangle = -\frac{\mu(mM + eQ)^2(2\mu M + eQ)^2}{2n^3(l + 1/2)}; \quad (36)$$

$$\langle V^{(4)} \rangle = -\left\langle \frac{l(l + 1)M}{\mu\rho^3} \right\rangle = -\frac{\mu^2 M(\mu M + eQ)^3(1 - \delta_{l0})}{n^3(l + 1/2)} \quad (37)$$

Astfel, în prima aproximație relativistă ($\sim v^2/c^2$) obținem următoarea formulă pentru energia nivelelor a unei particule scalare (de spin 0) cu sarcina electrică în cîmpul gravific al unui corp de asemenea încărcat electric, restabilind dimensiunile fizice ale mărimilor :

$$\begin{aligned} \left(\frac{E}{\mu c^2} \right)_{nl} = & 1 - \frac{(G\mu M + eQ)^2}{2(n\hbar c)^2} + \frac{3(G\mu M + eQ)^3}{8(n\hbar c)} \cdot (5G\mu M + eQ) - \\ & - \frac{(G\mu M + eQ)^2}{2n^3(\hbar c)^2(l + 1/2)} \left(\frac{2G\mu M(G\mu M + eQ)}{(\hbar c)^2} (3 - \delta_{l0}) + \left(\frac{eQ}{\hbar c} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (38)$$

Se poate verifica destul de ușor, că în limita $Q = 0$ această formulă concordă exact cu formula (19), dedusă anterior pentru cîmpul Schwarzschild, iar în limita $M = 0$ se obține formula (20) pentru structura fină a particulei cu spin 0 în cîmp coulombian. Aceste corespondențe sînt posibile, fiindcă în condițiile menționate mai sus cîmpul gravitațional și cel electromagnetic sînt independente și nu se perturbă reciproc. Este interesant să remarcăm, că energia totală de legătură (38) se prezintă ca suma energiilor (19 a) și (20) plus energia de interferență.

2.4. DEPLASAREA PERIHELIIULUI ÎN SPAȚIU-TIMP REISSNER-NORDSTROM

Aceeași constatare se referă și la valoarea absolută a deplasării periheliului orbitei în cazul superpoziției de câmpuri, care se calculează în maniera amintită în paragraful precedent :

$$\Delta\varphi = 2\pi + \frac{\pi}{L^2 c^2} (6(G_\mu M)^2 + 6G_\mu M e Q + (eQ)^2) \quad (39)$$

Am păstrat intenționat în această relație dimensiunea fizică a mărimilor fizice pentru a pune în evidență natura diferită a forțelor, ce cauzează același efect cinematic. Din această relație se vede în mod explicit, că valoarea absolută a deplasării periheliului orbitei în câmp coulombian este de 6 ori mai mică decât în câmp Schwarzschild, iar valoarea minimă a acestui efect pentru o particulă încărcată în câmp Reissner-Nordström cu $Q \ll \sqrt{GM}$ se atinge în cazul, când $Q \rightarrow -G_\mu M/e$.

Efectul complex de deplasare a periheliului în câmp Reissner-Nordstrom (precum și structura fină respectivă (37) — (40)) a fost calculat în lucrarea autorului acestui studiu [12].

3. STRUCTURA SPECTRULUI DE ENERGII AL PARTICULEI KLEIN-GORDON ÎN CÂMP GRAVIFIC KERR

3.1. GEOMETRIA KERR ȘI ECUAȚIA KLEIN-GORDON

Vom studia în continuare structura spectrului de energii al unei particule Klein-Gordon în câmp gravific Kerr [13], sau [1], care în coordonate Boyer-Lindquist [14] se prezintă sub forma :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM r}{\Sigma c^2}\right) (cdt)^2 + \frac{4GM r \sin^2 \vartheta}{\Sigma c} dt d\varphi - \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 - \Sigma d\vartheta^2 - \left(r^2 + a^2 + \frac{2GM r a^2 \sin^4 \vartheta}{\Sigma c^2}\right) d\varphi^2 \quad (40)$$

cu $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta$ și $\Delta = r^2 - 2GM r/c^2 + a^2$.

Această metrică este axial simetrică (fiindcă nu depinde de coordonata unghiulară φ) și staționară (fiindcă coeficienții metrici nu depind de coordonata timp t). Parametrii, care determină geometria sînt masa corpului central M și momentul cinetic de rotație $\mathbf{J} = Mac\mathbf{n}_z$. În limita, în care $a \rightarrow 0$, geometria Kerr trece în geometria Schwarzschild (1). Suprafața $g_{\theta\theta} = 0$ determină limita staționară a geometriei Kerr. Soluția pentru această suprafață este :

$$r_0(\vartheta) = \frac{GM}{c^2} + \left(\frac{G^2 M^2}{c^4} - a^2 \cos^2 \vartheta\right)^{1/2}$$

În interiorul acestei suprafețe toți observatorii fizici sînt implicați în mișcare de rotație în jurul corpului central, indiferent de condițiile inițiale ale mișcării.

Orizontul evenimentelor pentru un observator din exterior ce corespunde soluției mai mari a ecuației: $g_{rr} = 0$, pentru care găsim:

$$r_+ = \frac{|GM|}{c^2} + \left(\frac{G^2 M^2}{c^4} - a^2 \right)^{1/2} \quad (42)$$

Valoarea maxim posibilă a parametrului lui Kerr (a), admisă de principiul cauzalității, se determină din condiția existenței unui orizont real în jurul singularității: $0 \leq a \leq GM/c^2$. La limita din stînga a acestei inegalități se realizează soluția Schwarzschild a ecuațiilor Einstein, iar la limita din dreapta — soluția Kerr extremală.

Domeniul de spațiu-timp cuprins între limita staționară $r_0(\vartheta)$ și orizontul r_+ se numește ergosferă. În acest domeniu nu este posibilă mișcarea cu $r = \text{const}$ fără rotație în jurul găurii negre. În același timp numai din zona aflată în interiorul orizontului de evenimente nu există posibilitatea evadării în exterior.

Partea spațială a funcției de undă a ecuației Klein-Gordon (2) satisface ecuația următoare (vom folosi în continuare sistemul de unități $c = \hbar = G = 1$):

$$\left\{ -\omega^2 g^{tt} + 2\omega g^{t\varphi} \hat{L}_z + \mu^2 + (-g)^{1/2} \frac{\partial}{\partial x^k} \left((-g)^{1/2} g^{km} \frac{\partial}{\partial x^m} \right) \right\} \psi(r, \vartheta, \varphi) = 0 \quad (43)$$

În această ecuație am folosit notațiile: $k, m = 1, 2, 3$ (r, ϑ, φ), $\hat{L}_z = -i \frac{\partial}{\partial \varphi}$ reprezentînd operatorul proiecție al momentului cinetic orbital al particulei pe axa de simetrie Oz ($\vartheta = 0$), care este o integrală a mișcării:

$$\hat{L}_z \psi = m \psi \quad (44)$$

3.2. CONSIDERAȚII ASUPRA STRUCTURII SPECTRULUI DE ENERGII

În caz general energia particulei scalare depinde de numerele cuantice n, l, m , precum și de parametrul de rotație al sursei a . Însă în componentele contravariante ale tensorului metric g^{km} intră doar pătratul parametrului de rotație a^2 ; respectiv în partea spațială a operatorului D'Alembert intră doar pătratul proiecției momentului m^2 . Deci energia totală a particulei scalare se va prezenta în felul următor:

$$\omega = \omega_{n, l, m, m^2}(a, a^2) \quad (45)$$

Să examinăm în continuare cazul particular $2\mu M \ll l + 1/2$ cînd parametrul a este arbitrar. Mișcarea particulei este nerelativistă în acest caz, iar în prima aproximație spectrul de energii este asemănător celui de

hidrogen. Însă, în următoarea aproximație — întâia relativistă ($\sim v^2/c^2$), sînt posibile devieri de la formula (19) pentru structura fină, cauzate de schimbarea componentelor diagonale ale metricii și dependența acestor componente de parametrii a^2 și m^2 . Cu alte cuvinte se schimbă geometria spațiu-timpului în domeniul barierei și a gropii de potențial. Energia particulei scalare poate fi prezentată sub forma :

$$\left(\frac{\omega}{\mu}\right)_{nlm} = 1 - \frac{\mu^2 M^2}{2n^2} + \frac{\Delta\omega_{nlm,m^2} 2(a^2)}{\mu} + \frac{\Delta\omega_{nlm}(a)}{\mu} \quad (46)$$

Energia $\Delta\omega_{nlm}(a^2)$ formează structura fină a nivelelor energetice. În cazul $a \ll M$ dependența acestei părți de parametrii m^2 și a^2 dispare, astfel, încît structura fină este determinată de formula (19.a) menționată anterior. În acest caz se realizează geometria Kerr linearizată după parametrul a (sau geometria Kerr cu rotație slabă) :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{4Ma \sin^2 \vartheta}{r} dt d\varphi - \\ - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \quad (47)$$

în care separarea variabilelor ecuației Klein-Gordon poate fi obținută cu ajutorul funcțiilor sferice armonice, momentul orbital cinetic $L = \sqrt{l(l+1)}$, fiind o integrală exactă a mișcării și în acest caz. Devieri de la formula (19) pentru structura fină sînt posibile doar în limita extremă a geometriei Kerr ($a \rightarrow M$). Se poate, însă, demonstra la modul riguros, că în acest caz numărul m^2 va figura doar în termenii

$$\sim \frac{\mu^4 M^4}{n^4} \cdot \frac{\mu^2 a^2}{n^2} \cdot \frac{m^2}{l^2}$$

prin urmare putem considera, că :

$$\Delta\omega^{(2)} \equiv \Delta\omega_{nlm^2}(a^2) \equiv \Delta\omega_{nl}(a^2), \text{ pentru } 2\mu M \ll l + 1/2 \text{ și } a \leq M$$

iar dependența acestei energii de a^2 este slabă.

3.3. EFECTUL LENSE-THIRRING CUANTIC

Interacțiunea particulei cu componentele nediagonale ale cîmpului gravitic $g_{\mu\nu}$ formează contribuția în energie $\Delta\omega^{(3)} \equiv \Delta\omega_{nlm}(a)$, care este descrisă prin termenul al doilea în ecuația (43). În cazul stărilor evasistationare particulele sînt localizate la distanțe mari de centru în comparație cu raza Schwarzschild, prin urmare această interacțiune de ordinul v^2/c^2

poate fi calculată independent de calculul structurii fine $\Delta\omega^{(2)}$. Aplicând metoda perturbațiilor, vom obține :

$$\begin{aligned}\Delta\omega^{(3)} = \Delta\omega_{nlm}(a) &= \left\langle nlm \left| \frac{2\mathbf{J} \cdot \mathbf{L}}{r^3} \right| nlm \right\rangle = \langle nlm | -2\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{L} | nlm \rangle = \\ &= 2\mu \cdot \frac{m(\mu M)^4(\mu a)}{n^3 l(l+1/2)(l+1)} \cdot (1 - \delta_{l0})\end{aligned}\quad (48)$$

funcțiile radiale fiind cele din relația (11), iar vectorul $\mathbf{\Omega}$ — vectorul vitezei unghiulare de precesie Lense - Thirring [1, 11, 12] :

$$\mathbf{\Omega} = \frac{3(\mathbf{J} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{J}}{r^3} \quad (49)$$

Relația (48) a fost obținută în lucrarea [15].

Energia totală a particulei în câmp Kerr cu rotație slabă ($a \ll GM/c^2$) se prezintă sub aspectul :

$$\begin{aligned}\left(\frac{E}{\mu c^2} \right)_{nlm} &= 1 - \frac{(G\mu M)^2}{2(n\hbar c)^2} - \frac{(G\mu M)^4}{(n\hbar c)^4} \left(\frac{(3 - \delta_{l0})n}{(l+1/2)} - \frac{15}{8} \right) + \\ &+ \frac{2\mu ac}{\hbar} \cdot \frac{(G\mu M)^4 m}{n^3(\hbar c)^4 l(l+1/2)(l+1)} \cdot (1 - \delta_{l0}),\end{aligned}\quad (50)$$

menționând încă o dată că doar penultimul termen va suporta modificări nu prea mari în cazul, când se va trece la rotații arbitrare $0 \leq a \leq M$, celelalte contribuții fiind de un ordin mai mic (în puterile lui G) decât G^4 .

Astfel, interacțiunea suplimentară între momentele cinetice ale corpului central și a particulei elimină completamente degenerarea nivelurilor de energie ale particulei scalare, atît după valoarea proiecției momentului cinetic al particulei pe axa de rotație a corpului Kerr, cît și după orientarea acesteia. Fiecare nivel cuantic al particulei cu numerele n și l se despică în $2l+1$ subnivele în corespundere cu numărul total de proiecții posibile ale momentului cinetic orbital al particulei pe axa de simetrie a câmpului extern. În acest sens despicarea obținută amintește despicarea normală Zeeman a liniilor spectrale atomice, observabile în câmpuri magnetice slabe, dacă nu se ține cont de efectele de spin [3, 16]. Menționăm, totuși, că despicarea (48) creează structura hiperfină a nivelurilor energetice pentru o particulă scalară, întrucît :

$$\left| \frac{\Delta\omega^{(3)}}{\Delta\omega^{(2)}} \right| \sim \frac{\mu M}{l+1} \cdot \frac{|m|}{l} \ll 1 \quad (51)$$

Vom menționa, de asemenea, că efectul evasimagnetic al câmpului gravitațional de rotație asupra radiației a fost menționat pentru prima

dată de Ya. B. Zel'dovici [17, 18], care a arătat, că fotonii emiși de către un atom în câmp gravitic Kerr vor avea linii spectrale despicate în mod analog cu despicarea Zeeman în câmp magnetic. Deosebirea efectului, considerat de noi, constă în faptul, că radiația este emisă nu de un atom, ci de o particulă, legată gravitațional de un corp (eventual un black-hole) de rotație.

Se poate demonstra, că efectul examinat aici corespunde la nivel clasic efectului Lense-Thirring de deplasare sistematică a periastronului orbitei și de precesie a planului orbitei unui corp (dacă acest plan nu este ecuatorial) în câmpul gravitic al altui corp de rotație [1, 11]. Folosind invarianții adiabatici ai mișcării cvasiclasice (21), vom calcula variația părții spațiale a acțiunii clasice $S = -\omega t + m\varphi + S_r + S_\theta$ în mod similar celui din compartimentul 1 și vom obține legea evoluției în timp a vectorului excentricității e și a momentului cinetic orbital al particulei :

$$\frac{dL}{dt} = -\Omega \times L; \quad \frac{de}{dt} = -\Omega \times e \quad (52)$$

Astfel, efectul de despicare cvasimagnetică a nivelelor energetice ale unei particule scalare poate fi numit efect Lense-Thirring cuantic [12].

4. STRUCTURA SPECTRULUI DE ENERGII AL PARTICULEI SCALARE ÎN CÂMP KERR-NEWMAN CU SARCINA ELECTRICĂ MICĂ

4.1. GEOMETRIA KERR-NEWMAN ȘI ECUAȚIA KLEIN-GORDON

Să examinăm situația complexă, cînd corpul central în afară de moment cinetic propriu $J = Macn_z$ este încărcat electric cu o sarcină $-Q = -Ze$. În cazul, cînd sarcina electrică este arbitrară, dar $GQ^2/c^4 + a^2 \leq G^2M^2/c^4$ se realizează geometria Kerr-Newman (vezi [1]) cu orizontul de evenimente plasat la :

$$r_+ = GM/c^2 + \left(\frac{G^2M^2}{c^4} - a^2 - \frac{GQ^2}{c^4} \right)^{1/2} \quad (53)$$

Ne vom limita, însă, la cazul, cînd $Q \ll \sqrt{GM}$, astfel încît în exteriorul orizontului de evenimente se realizează de fapt geometria Kerr (40), la care se adaugă un cvadrivector potențial al câmpului electromagnetic :

$$A_\mu = (-Qr/\Sigma, 0, 0, Qr\sin^2\vartheta/\Sigma) \quad (54)$$

și câmpul electromagnetic respectiv :

$$\begin{aligned} F = & -Q \frac{r^2 - a^2 \cos^2\vartheta}{\Sigma^2} dr \wedge [dt - a \sin^2\vartheta d\varphi] - \\ & - \frac{Q}{\Sigma^2} \cdot ar \sin 2\vartheta d\vartheta \wedge [(r^2 + a^2)d\varphi - adi] \end{aligned} \quad (55)$$

Ecuația Klein-Gordon în forma generală este dată și în acest caz de relația (26). Vom prezenta această ecuație pentru partea spațială a funcției de undă, avînd în vedere staționaritatea geometriei Kerr-Newman și a cîmpului electromagnetic asociat :

$$\left[-g^{tt}(\omega^2 - \omega e A_t + e^2 A_t^2) + \mu^2 + (-g)^{1/2} \frac{\partial}{\partial x^k} \left((-g)^{1/2} g^{km} \frac{\partial}{\partial x^m} \right) + \right. \\ \left. + g^{t\varphi}[(\omega - e A_t)(m + e A_\varphi) + \omega m - e^2 A_t A_\varphi] - \right. \\ \left. - e A_\varphi g^{\varphi\varphi}(m + e A_\varphi) \right] \psi(r, \vartheta, \varphi) = 0 \quad (56)$$

Rîndul de sus al acestei ecuații coincide cu ecuația (26.a) pentru partea spațială a funcției de undă în cîmp Reissner-Nordström, cel de jos fiind un adaos, introdus de rotația black-hole-ului. În cazul anulării cîmpului electromagnetic obținem ecuația (43) pentru metrica Kerr.

4.2. STRUCTURA SPECTRULUI. INTERACȚIA MOMENTELOR CINETICE

Ne limităm în continuare la cazul, cînd „coada” newtoniană a potențialului de interacție este bine delimitată de orizontul evenimentelor printr-o barieră centripetă, adică :

$$2(\mu M + eQ) \ll l + 1/2, \quad a \leq M \quad (57)$$

Repetînd studiul acestui caz, efectuat pentru metrica Kerr, vom conchide, că energia de legătură a particulei scalare se prezintă în forma :

$$\omega = \mu - \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\mu M + eQ}{n} \right)^2 + \Delta\omega_{n,l,m}(eQ, a^2) + \Delta\omega_{n,l,m}(Ma) + \Delta\omega_{n,l,m}(Qa) \quad (58)$$

dependența termenului $\Delta\omega_{n,l,m}(eQ, a^2)$ de m^2 și a^2 fiind slabă.

Calculul acestei contribuții pentru un cîmp Kerr extremal ($a \rightarrow M$) este dificil și nu va fi prezentat aici. Cînd rotația corpului central nu este extremală, acest termen determină structura fină a spectrului de energii și se prezintă prin suma termenilor (36) și (37), calculați în compartimentul 2 al acestui studiu, cu ajutorul funcțiilor radiale de tip (11). Această contribuție, cum am accentuat anterior, corespunde efectului clasic de avans al periheliului particulei în cîmpul forțelor centrale :

$$\Delta\omega_{n,l} = \mu \frac{(\mu M + eQ)^2}{n^3(l + 1/2)} \left[\frac{1}{2} \cdot (2\mu M + eQ)^2 + \mu M(\mu M + eQ)(1 - \delta_{l0}) \right] \quad (59)$$

Contribuția interacției dintre momentul cinetic propriu al corpului Kerr și cel orbital al particulei încărcate se calculează la fel ca și în compartimentul precedent, folosind aproximația nulă uzuală :

$$\begin{aligned}\Delta\omega_{n,l,m}(a) &= \left\langle nlm \left| \frac{2\mathbf{J} \cdot \mathbf{L}}{r^3} \right| nlm \right\rangle = \langle nlm | -2\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{L} | nlm \rangle = \\ &= 2\mu^2 ma \cdot \frac{\mu M(\mu M + eQ)^3}{n^3 l(l+1/2)(l+1)} (1 - \delta_{l0})\end{aligned}\quad (60)$$

Evident, această contribuție se anulează, când produsul $maM = 0$. Interacția electromagnetică în acest caz modifică doar valoarea absolută a despicării nivelelor de către momentul cinetic al corpului central. Vom menționa, de asemenea, că contribuția celorlalți termeni din paranteza întâia a rîndului de jos a ecuației (56) este neglijabilă în acest context.

4.3. INTERACȚIA MOMENTELOR MAGNETICE

Proveniența ultimului termen în formula generală (60) pentru energia particulei scalare în câmp Kerr-Newman este legată cu momentul magnetic propriu al corpului Kerr încărcat electric

$$\mathbf{M} = -\frac{Q\mathbf{J}}{M} = -Qa\mathbf{e}_z, \quad (61)$$

care crează un câmp magnetic dipolar cu componente dominante (la distanțe mari $r \gg r_+$) într-un sistem de referință asimptotic nemișcat [1] :

$$\begin{aligned}B_{\hat{r}} = F_{\hat{s}\hat{\varphi}} &= \frac{F_{\vartheta\varphi}}{r^2 \sin\vartheta} \cong -2 \frac{Qa}{r^3} \cos\vartheta \\ B_{\hat{\vartheta}} = F_{\hat{\varphi}\hat{r}} &= \frac{F_{\varphi r}}{r \sin\vartheta} \cong -\frac{Qa}{r^3} \sin\vartheta\end{aligned}\quad (62)$$

sau în forma vectorială :

$$\mathbf{B} \cong \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{M} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{M}r^2}{r^5} \quad (62.a)$$

Componentele (62) ale cîmpului magnetic se calculează din relația (55), de unde rezultă imediat momentul magnetic al obiectului Kerr-Newman. (Este remarcabil; cum menționează autorii tratatului [1], că factorul giromagnetic pentru un black-hole Kerr-Newman coincide cu cel al electronului). Termenul al doilea din rîndul de jos al ecuației Klein-Gordon (56), proporțional cu $g^{\varphi\varphi}$, conține interacția momentului magnetic al par-

ticulei, datorat mișcării orbitale: $\mathbf{m} = \frac{e\mathbf{L}}{2\mu}$ cu momentul magnetic al corpului Kerr $\mathbf{M}$, exprimat în formula (61). Contribuția acestei interacții specifice se calculează în mod analog cu calculul anterior pentru interacția directă a momentelor cinetice:

$$\begin{aligned}\Delta\omega_{n,l,m}(Qa) &= \left\langle nlm \left| -\frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{M}}{r^3} \right| nlm \right\rangle = \langle nlm | -\mathbf{B} \cdot \mathbf{m} | nlm \rangle = \\ &= \mu^2 ma \cdot \frac{eQ(\mu M + eQ)^3}{2n^3 l(l+1/2)(l+1)} (1 - \delta_{l0})\end{aligned}\quad (63)$$

Astfel, contribuția totală a interacțiunii evasimagnetice a particulei scalare cu un corp Kerr încărcat electric se va exprima prin formula:

$$\begin{aligned}\Delta\omega_{n,l,m}(a) &= \langle nlm | -\mathbf{B} \cdot \mathbf{m} - 2\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{L} | nlm \rangle = \left\langle nlm \left| \frac{Qaem}{2\mu r^3} + \right. \right. \\ &+ \left. \frac{2Mam}{r^3} \right| nlm \rangle = \mu^2 ma \cdot \frac{(4\mu M + eQ)(\mu M + eQ)^3}{2n^3 l(l+1/2)(l+1)} (1 - \delta_{l0})\end{aligned}\quad (64)$$

Cum se vede în mod absolut convingător din relația obținută, despicarea evasimagnetică a nivelelor este în întregime datorată rotației corpului central. Energia totală a particulei în câmp Kerr-Newman în aproximația adoptată este:

$$\begin{aligned}\left(\frac{E}{\mu c^2} \right)_{nlm} &= 1 - \frac{(G\mu M + eQ)^2}{2(n\hbar c)^2} + \frac{3(G\mu M + eQ)^3}{8(n\hbar c)^4} \cdot (5G\mu M + eQ) - \\ &- \frac{(G\mu M + eQ)^2}{2n^3(\hbar c)^2(l+1/2)} \left(\frac{2G\mu M(G\mu M + eQ)}{(\hbar c)^2} (3 - \delta_{l0}) + \left(\frac{eQ}{\hbar c} \right)^2 \right) + \\ &+ \frac{m\mu a(4G\mu M + eQ)(G\mu M + eQ)^3}{2\hbar(n\hbar c)^3 l(l+1/2)(l+1)} (1 - \delta_{l0})\end{aligned}\quad (65)$$

Menționăm, că contribuția „suportului” gravitațional (newtonian) în valoarea absolută a energiei de despicare a liniilor spectrale în câmp Kerr-Newman este de 4 ori mai mare decât cea a „suportului” coulombian, cum rezultă din ecuațiile (64) și (65). Aceasta se explică prin faptul că energia de interacție totală în câmp magnetic și gravitațional (ce nu se perturbă reciproc) este:

$$\begin{aligned}U(r) &= -\mathbf{B} \cdot \mathbf{m} - 2\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{L} = \frac{-3(\mathbf{n} \cdot \mathbf{M})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}) + \mathbf{M} \cdot \mathbf{m}}{r^3} + \\ &+ 2 \frac{\mathbf{J} \cdot \mathbf{L} - 3(\mathbf{n} \cdot \mathbf{J})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{L})}{r^3} = \frac{\mathbf{M} \cdot \mathbf{m} + 2\mathbf{J} \cdot \mathbf{L}}{r^3} = \left(\frac{eQ}{2\mu M} + 2 \right) \frac{\mathbf{J} \cdot \mathbf{L}}{r^3}\end{aligned}\quad (66)$$

căci :

$$\mathbf{m} = \frac{e\mathbf{L}}{2\mu} \text{ și } \mathbf{n} \cdot \mathbf{L} = 0$$

Evident, ca și în cazul geometriei Kerr putem deduce din relația obținută legea mișcării vectorului excentricității $\mathbf{e}$ și a momentului cinetic (magnetic) orbital al particulei. Un calcul analog celui prezentat în compartimentul precedent arată, că :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{e}}{dt} &= - \left(\frac{eQ}{4\mu M} + 1 \right) \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{e}; & \frac{d\mathbf{L}}{dt} &= - \left(\frac{eQ}{4\mu M} + 1 \right) \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L} \\ \frac{d\mathbf{m}}{dt} &= - \left(\frac{eQ}{4\mu M} + 1 \right) \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{m}, \end{aligned} \quad (67)$$

ceea ce denotă o mișcare de precesie a planului orbitei cu frecvența Larmor efectivă :

$$\boldsymbol{\Omega}_{L, \text{eff}} = \left(\frac{eQ}{4\mu M} + 1 \right) \cdot \boldsymbol{\Omega} = -a \left(\frac{eQ}{4\mu} + M \right) \cdot \frac{\mathbf{n}_z - 3\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_z)}{r^3} \quad (68)$$

sau, restabilind dimensiunile mărimilor fizice :

$$\boldsymbol{\Omega}_{L, \text{eff}} = \left(GM + \frac{eQ}{4\mu} \right) a \cdot \frac{3n \cos \vartheta - n_z}{cr^3} \quad (68.a)$$

Această precesie, cum s-a menționat deja, include și o deplasare suplimentară a periheliului orbitei în raport cu cazul cîmpurilor de simetrie sferică Schwarzschild și Reissner-Nordström. Efectul de precesie a planului orbitei nu are loc, doar în cazul, cînd acest plan este ecuatorial ($\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L} = 0$). Vectorul excentricității $\mathbf{e}$ exercită o mișcare de rotație în jurul vectorului Lense-Thirring $\boldsymbol{\Omega}$ cu frecvența respectivă (68).

5. CONCLUZII

Stările cvasilegate ale particulelor cu masa de repaus nenulă, se realizează în cîmpurile Schwarzschild, Kerr, Reissner-Nordström și Kerr-Newman în cazul cînd $\mu M \ll M_{\text{Pl}}^2/4$, avînd un spectru energetic asemănător cu cel al atomului de hidrogen. Un astfel de spectru ar putea fi detectat în radiația Hawking electromagnetică [19], emisă de găurile negre mici în evaporare.

Liniile spectrale de absorbție ($2p \rightarrow 1s$) cu o energie de tranziție :

$$\frac{\mathcal{E}_{2p} - \mathcal{E}_{1s}}{\mu c^2} = \frac{3}{8} \cdot \frac{\mu^2 M^2}{M_{\text{Pl}}^4} = 0,026 \div 0,051 \quad (69)$$

pentru pionii ($\pi^\pm$) aruncați de pe $1s$ pe $2p$ ar trebui să apară în cazul absorbției fotonilor emiși de black-hole. Probabilitatea tranziției dipolare electromagnetice ($1s \rightarrow 2p$) se calculează destul de ușor [20]:

$$w = \left(\frac{2}{3}\right)^8 \cdot \alpha \cdot \frac{\mu c^2}{\hbar} \left(\frac{\mu M}{M_{P1}^2}\right)^4 \quad (70)$$

Intervalul de valori numerice, indicat în relația (69), corespunde intervalului de mase de black-hole-uri de $5 \div 7 \cdot 10^{14}$ g ce se evaporază în epoca actuală în rezultatul efectului Hawking (vezi [21], sau cercetările mai recente [22], care nu modifică serios aceste limite).

Un alt proces, care ar putea să pună în evidență existența nivelelor cvasidiscrete pentru particule cu masa de repaus nenulă este ionizarea directă a lor cu radiație de fotoni [23]:

$$\pi^\pm + \gamma \rightarrow \pi^\pm,$$

precum și:

$$\pi + \gamma \rightarrow \pi + \gamma;$$

$$\pi + \nu_\mu \rightarrow \mu; \quad \pi + \nu_e \rightarrow e$$

Liniile de emisie cu aceeași energie ar fi un indiciu asupra efectului de instabilitate bosonică a găurilor negre Kerr primordiale formate cu moment cinetic mare [24, 20].

În cazul fluctuațiilor de sarcină electrică a black-hole-ului energia, ce corespunde liniilor de tranziție ($2p \rightarrow 1s$) se deplasează:

$$\frac{E_{2p} - E_{1s}}{\mu c^2} = \frac{3}{8} \left(\frac{\mu M}{M_{P1}^2} \pm Z\alpha \right)^2 \quad (71)$$

în funcție de semnul interacțiunii coulombiene.

Efectele relativiste gravitaționale în câmpurile Schwarzschild și Kerr formează o structură fină și hiperfină a spectrului de stări energetice al particulelor (scalare). În cazul, când se realizează condiția:

$$\frac{2GM\mu}{c\hbar} \ll 1/2 \quad (72)$$

aceste efecte formează structura fină și hiperfină pe fondul spectrului de tip hidrogenic nerelativist. Menționăm, că despicările respective ale liniilor spectrale sînt mult mai mari decît lărgimea cvasinivelelor, cauzată de absorbția particulelor scalare sub orizontul de evenimente al black-hole-ului. Efectul specific relativist pentru particula scalară în câmp Schwarzschild constă în despicarea nivelelor $2p$ și $2s$:

$$\frac{E_{2p} - E_{2s}}{\mu c^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{G\mu M}{\hbar c} \right)^4 = \frac{1}{4} \left(\frac{\mu M}{M_{P1}^2} \right)^4 \quad (73)$$

Aceeași valoare a efectului se păstrează și în câmpul Kerr în cazul rotațiilor slabe ($a \ll GM/c^2$), modificându-se doar în cazul rotației apropiate de cea extremală ($a \rightarrow GM/c^2$). Despicarea relativă (73) a nivelelor $2p$ și $2s$ în raport cu masa de repaus pentru un pion π^+ sau π^- , pusă în evidență aici, ar constitui pentru cazul unui black-hole în evaporare la epoca actuală [21] un efect de mărire :

$$\frac{E_{2p} - E_{2s}}{\mu c^2} = 0,001 \div 0,005 \quad (74)$$

Menționăm, că acest efect este de trei ori mai mare decât efectul analog pentru particula scalară în câmp coulombian în spațiu plat (vezi, spre exemplu, [5]). Comparația se face după substituirea $\mu M/M_{\pi}^2 \rightarrow Z\alpha$.

Efectul acesta reprezintă analogul cuantic al efectului clasic bine-cunoscut de deplasare a periheliului orbitei în câmp gravitațional relativist și a fost calculat în lucrările [12, 15].

Formula de mai sus (74) se modifică substanțial, în cazul, când corpul central și particula sînt încărcate electric. În acest caz :

$$\frac{E_{2p} - E_{2s}}{\mu c^2} = \frac{(G\mu M + eQ)^2}{12(\hbar c)^4} \cdot (3(G\mu M)^2 + 3G\mu M eQ + e^2 Q^2) \quad (75)$$

Interacția orbitei particulei cu momentul cinetic propriu al găurii negre Kerr cauzează despicarea nivelului $2p$ al particulei scalare în trei subnivele : $2p^{+1}$, $2p^0$, $2p^{-1}$, energia căroră diferă cu :

$$\frac{\Delta E_{2p}}{\mu c^2} = \frac{\mu a c}{12\hbar} \cdot \left(\frac{G\mu M}{\hbar c} \right)^4 = \frac{1}{6} \cdot \frac{a}{R_g} \left(\frac{\mu M}{M_{\pi}^2} \right)^5 \quad (76)$$

Această despicare amintește de efectul Zeeman de despicare a liniilor spectrale atomice în câmpuri magnetice relativ slabe, cînd nu se ia în considerație spinul electronului.

Prezintă interes în acest concurs de idei calculul următoarelor procese elementare în câmpul gravitațional al black-hole-urilor mici :

$$\pi^0 \rightarrow 2\gamma$$

$$\pi^+ + \pi^- \rightarrow 2\gamma, \quad \pi + \mathbf{J} \rightarrow \pi + \gamma$$

$$\pi_{n,i+1}^+ + \pi_{n,i}^- \rightarrow \gamma$$

$$\pi^\pm \rightarrow \mu^\pm + \nu_\mu \rightarrow e^\pm + 2\nu_\mu$$

Formula (77) prezentată mai sus suferă modificări în limita câmpului Kerr extremal ($a \rightarrow GM/c^2$), precum și în cazul unei interacții suplimentare

electromagnetice între sarcina corpului Kerr și cea a particulei. În ultimul caz :

$$\frac{\Delta E_{2p}}{\mu c^2} = \frac{\mu a c}{48\hbar} \cdot \frac{(4GM\mu + eQ)(G\mu M + eQ)^3}{(\hbar c)^4} \quad (77)$$

Valoarea relativă a efectului de despicare cvasimagnetică a liniilor spectrale $2p$ pentru pioni în câmpul unui black-hole de rotație (Kerr) constituie :

$$\frac{\Delta E_{2p}}{\mu c^2} = \left(\frac{ac^2}{GM} \div 5,548 \right) \cdot 10^{-4} \quad (78)$$

Limita din dreapta a intervalului indicat corespunde rotației extreme a unei găuri Kerr cu masa de $7 \cdot 10^{14}g$.

Mult timp cercetările de teorie cuantică în spații curbe au purtat o amprentă academică (puteau fi făcute doar „de zile mari”). Descoperirea găurilor negre stelare [25], precum și posibilitatea existenței unor găuri negre primordiale (cosmologice) și a worm-hole-urilor fac ca aceste cercetări să fie dorite.

Recunoștințe. Autorul aduce sincere mulțumiri membrilor seminarului de gravitație și astrofizică al laboratorului de gravitație I.G.S.S. pentru discuții fructuoase și interes pentru problemele abordate în acest studiu.

BIBLIOGRAFIE

1. C. W. MISNER, K. S. THORNE, J. A. WHEELER, *Gravitation*, W. H. Freeman & Co., San Francisco, 1973.
2. A. MESSIAH, *Mecanica cuantică*. Editura științifică, 1973.
3. L. D. LANDAU, E. M. LIFSHITS, *Kvantovaia mehanika. Nerelativistskaia teoria*, Izd-vo Nauka, Moskva, 1974. [trad. fr. Editions Mir, Moscou, 1966].
4. N. I. IONESCU-PALLAS, *Elemente de mecanică cuantică*, București, IAP Press, 1985.
5. A. A. SOKOLOV, I. M. TERNOV, V. Ch. ZHUKOVSKI, *Kvantovaia mehanika*, Moskva. Izd-vo Nauka. 1979 [trad. engl. Mir Publishers, Moscow, 1983].
6. N. I. IONESCU-PALLAS, *Introducere în mecanica teoretică modernă*, Editura Academiei Române, 1969.
7. V. A. FOCK, *Fundamentals of Quantum Mechanics*, Mir Publishers, Moscow, 1978.
8. A. GAINA, GH. CIZHOV, *Izvestia vysshih uchebnyh zavedenii SSSR*, **23**, 120—121 (1980).
9. A. GAINA, Th. COCIORBA ; *Jurnal experimental'noi i teoreticeskoi fiziki*, **92**, 369—378 (1987) [trad. engl. Sov. Phys. JETP **65** (2), 211—215 (1987)].
10. N. IONESCU-PALLAS, *Relativitate generală și cosmologie*, Editura științifică și enciclopedică, București, 1980.
11. L. D. LANDAU, E. M. LIFSITS, *Teoria polia*, Moskva, Izd-vo Nauka, 1974 [trad. fr. Éditions Mir, Moscou, 1978].
12. A. GAINA, *Kvantovie ciastiti v poliah Einsteina-Maksvella*, Chișinău, Edit. Știința, 1989.
13. R. P. KERR, *Phys. Rev. Lett.*, **11**, 237—238 (1963).
14. R. H. BOYER, R. W. LINDQUIST, *J. Math. Phys.*, **8**, 265 (1967).
15. A. GAINA, I. M. TERNOV, *Izvestia vysshih uchebnyh zavedenii S.S.S.R.*, *Fizika* **31**, 10, 71—76 (1988) [trad. engl. : Soviet Physics Journ., **31**, 10 (1988)].
16. ȘERBAN ȚIȚEA, *Mecanica cuantică*, Editura Academiei, 1984.

17. Ya. B. ZEL'DOVICI, Pis'ma v jurnal eksperimental'noi i teoreticesckoi fiziki, **12**, 443—445 (1970).
18. YA. B. ZEL'DOVITCH & I. D. NOVIKOV, *Stars and Relativity*, University of Chicago Press, Chicago & London, 1971.
19. S. W. HAWKING, *Nature*, **248**, 30 (1974); *Commun. Math. Phys.*, **43**, 199 (1975).
20. A. GAINA, Pis'ma v Astron. Zh., **15**, 567—572 (1989) [trad. engl. *Sov. Astron. Lett.*, **15** (3), 243—245 (1989)].
21. D. N. PAGE, *Phys. Rev.*, D **13**, 198 (1976); D **14**, 3260 (1976); D **16**, 2402 (1977); D. N. PAGE and S. W. HAWKING, *Astrophys. J.*, **206**, 1, 1976.
22. A. D. SAKHAROV, Pis'ma v jurnal eksper. i teoret. fiziki, **44**, 295 (1987); JANE H. MACGIBBON, B. R. WEBBER, *Phys. Rev.*, D **41**, 3052—3079 (1990).
23. S. W. HAWKING, *comunicare privată* (1986).
24. T. J. M. ZOUROS and D. M. EARDLEY, *Annals of Physics* (N. Y.), **118**, 139—155 (1979).
25. R. D. BLANDFORD, K. S. THORNE, *Black holes Astrophysics*, in *An Einstein Centenary Survey*, ed. by S. W. Hawking & W. Israel, C.U.P., Cambridge, 1979.